D.1 Tijdrek en lengtekrimp

Opgave 1

a De lengte van de straaljager ℓ_b bereken je met de formule voor lengtekrimp.
De relativistische factor bereken je met de formule voor gammafactor.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

v = 0,50*c*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,50c)^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,50^2}} = 1,154$$

$$\ell_b = \frac{\ell_e}{\gamma}$$

$$\ell_e = 15 \text{ m}$$

$$\ell_b = \frac{15}{1,154} = 12,99 \text{ m}$$

Afgerond: $\ell_b = 13 \text{ m}$

b De snelheid van de straaljager bereken je met de formule voor gammafactor.
De gammafactor bereken je met de formule voor de lengtekrimp.

$$\ell_b = \frac{\ell_e}{\gamma}$$

$$\ell_b = 7,5 \text{ m}$$

$$7,5 = \frac{15}{\gamma}$$

$$\gamma = 2,0$$

$$2,0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{v}{c} = 0,866$$

v = 0,866*c*
Afgerond: *v* = 0,87*c*

Opgave 2

a De duur van de boodschap Δt_b bereken je met de formule voor de tijdrek.
De relativistische factor bereken je met de formule voor gammafactor.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

v = 0,60*c*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,60c)^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,60^2}} = 1,25$$

$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$
$\Delta t_e = 45$ s
$\Delta t_b = 1,25 \times 45 = 56,25$
Afgerond: $\Delta t_b = 56$ s

b De toonhoogte is volgt uit de frequentie. Voor de frequentie geldt: $f = \frac{1}{T}$
Het aantal trillingen blijft gelijk. Vanwege tijdrek wordt dezelfde boodschap gedurende een grotere tijd uitgesproken. De trillingstijd is dus groter en daardoor is de frequentie kleiner. Zijn stem klinkt dus lager.

c De frequentie bereken je met de tijdsduur die de bewegende waarnemer meet..
De tijdsduur die de bewegende waarnemer meet, bereken je met de formule voor de tijdrek.
De eigentijd bereken je met de hartslag.

De hartslag is 70 slagen per minuut.
De eigentijd t_e is $\frac{60}{70} = 0,8571$ s

$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$
$\gamma = 1,25$ (Zie vraag a)
$\Delta t_b = 1,25 \times 0,8571$
$\Delta t_b = 1,071$ s

$$f_b = \frac{1}{\Delta t_b}$$
$$f_b = \frac{1}{1,071}$$
$f_b = 0,933\ s^{-1}$
Dit is 60 × 0,9333 = 56,00 slagen per minuut
Afgerond: $f_b = 56\ min^{-1}$

Opgave 3

a De afstand die de muonen kunnen afleggen bereken je met de formule voor de snelheid.
De snelheid bereken met de lichtsnelheid.

v = 99,9% van de lichtsnelheid
$v = 0,999 \times 2,99792458 \cdot 10^8 = 2,99492666 \cdot 10^8$ m/s

$s = v \cdot t$
$t = 2,2\ \mu s = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s (Afstemmen eenheden)
$s = 2,99492666 \cdot 10^8 \times 2,2 \cdot 10^{-6} = 6,5888 \cdot 10^2$ m
Afgerond: $s = 6,6 \cdot 10^2$ m

b De dikte van de atmosfeer in het bewegende stelsel ℓ_b bereken je met de formule voor lengtekrimp.
De relativistische factor bereken je met de formule voor gammafactor.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$v = 0,999c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}999c)^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}999^2}} = 22{,}366$$

$$\ell_b = \frac{\ell_e}{\gamma}$$

$\ell_e = 10 \text{ km} = 10 \cdot 10^3 \text{ m}$ (Afstemmen eenheden

$$\ell_b = \frac{10 \cdot 10^3}{22{,}366}$$

$$\ell_b = 4{,}47 \cdot 10^2 \text{ m}$$

Dit is kleiner dan $6{,}6 \cdot 10^2$ m

Opgave 4

De snelheid bereken je met de formule voor de gammafactor.
De gammafactor bereken je met de lengtekrimp.

$$\ell_b = \frac{\ell_e}{\gamma}$$

$\ell_b = 150 \text{ m}$

$\ell_e = 200 \text{ m}$

$$150 = \frac{200}{\gamma}$$

$\gamma = 1{,}333$

$$1{,}333 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}6612$$

$v = 0{,}6612c$

Afgerond: $v = 0{,}661c$

Opgave 5

a De afstand s is de afstand die hoort bij de heen- en weergaande beweging.
Anita bevindt zich in het ruststelsel van de klok.
Daarbij hoort figuur D.1.
Anita ziet dat het foton de afstand $2d$ aflegt.
Er geldt:

$s = v \cdot t$

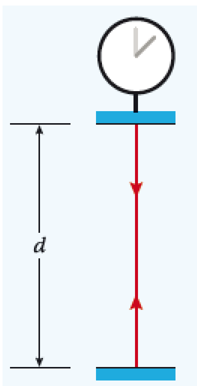
$s = 2d$

$v = c$

$t = T_A$

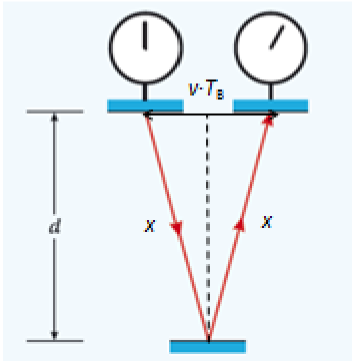
$2d = c \cdot T_A$

$$T_A = \frac{2d}{c}$$



Figuur D.1

b De afstand s is de afstand die hoort bij de heen en weergaande beweging.
Bruce ziet de beweging van het licht als in figuur D.2.
Bruce ziet dat het foton de afstand 2*x* aflegt.
Tegelijkertijd verplaatst de klok zich met de treinsnelheid v in de tijd T_B die Bruce meet.
Dus de klok leg de afstand $v \cdot T_B$ af.



Figuur D.2

Volgens de stelling van Pythagoras geldt:

$$x^2 = d^2 + (\tfrac{1}{2} v \cdot T_B)^2$$

Het foton legt de afstand 2*x* af

$$(2x)^2 = (2d)^2 + (v \cdot T_B)^2$$

$$2x = \sqrt{4d^2 + v^2 \cdot T_B^{\ 2}}$$

Er geldt:
$s = v \cdot t$

$$s = 2x = \sqrt{4d^2 + v^2 \cdot T_B^{\ 2}}$$

$v = c$
$t = T_B$

$$\sqrt{4d^2 + v^2 \cdot T_B^{\ 2}} = c \cdot T_B$$

$$T_B = \frac{\sqrt{4d^2 + v^2 \cdot T_B^{\ 2}}}{c}$$

c Door de twee formules $T_A = \frac{2d}{c}$ en $T_B = \frac{\sqrt{4d^2 + v^2 \cdot T_B^{\ 2}}}{c}$ te combineren werk je de variabele *d* weg.

Uit $T_A = \frac{2d}{c}$ volgt $4d^2 = c^2 \cdot T_A^{\ 2}$

Uit $T_B = \frac{\sqrt{4d^2 + v^2 \cdot T_B^{\ 2}}}{c}$ volgt $c^2 \cdot T_B^{\ 2} = 4d^2 + v^2 \cdot T_B^{\ 2}$

$$c^2 \cdot T_B^{\ 2} = c^2 \cdot T_A^{\ 2} + v^2 \cdot T_B^{\ 2}$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot T_B^{\ 2} = T_A^{\ 2}$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \cdot T_B = T_A$$

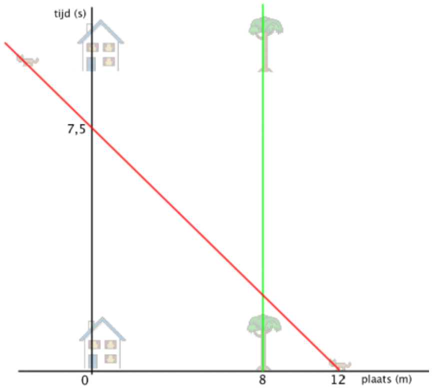
$$T_B = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \cdot T_A$$

Dat is gelijk aan $T_B = \gamma \cdot T_A$

D.2 Ruimtetijd-diagram

Opgave 6
Zie figuur D.3.
Het huis staat in de oorsprong van het ruimtetijd-diagram.
De wereldlijn van het huis valt samen met de *t*-as van het ruimtetijd-diagram.

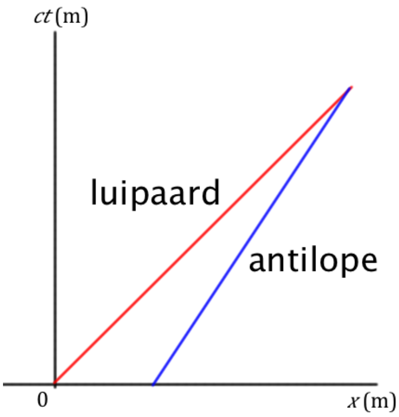
De wereldlijn van de boom loopt verticaal, aangezien de boom geen snelheid ten opzichte van het huis.
Voor het tijdstip waarop de hond het huis passeert geldt x = $v \cdot t$ met v = 1,6 m/s en x is de afstand van de hond tot het huis. Uit figuur D.10 van het basisboek blijkt x = 12 m..
Dus 12 = 1,6 · t. Hieruit volgt dat de hond na t =7,5 s het huis passeert.
De wereldlijn van de hond gaat dus door het punt (0,0 ; 7,5) en het punt (12; 0,0).



Figuur D.3

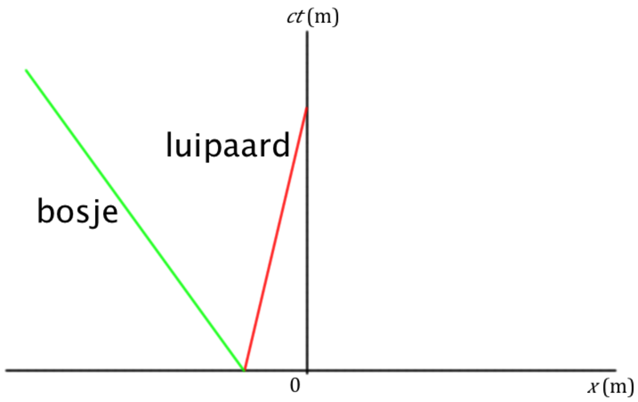
Opgave 7

a Zie figuur D.4.
Het bosje bevindt zich in de oorsprong van het ruimtetijd-diagram.
De wereldlijn van het bosje valt samen met de t-as van het ruimtetijd-diagram.
De luipaard ligt achter het bosje; dus begint de wereldlijn van de luipaard in de oorsprong en die van de antilope niet.
De snelheid van de luipaard is groter dan die van de antilope, dus loopt de wereldlijn van de luipaard minder steil dan die van de antilope.



Figuur D.4

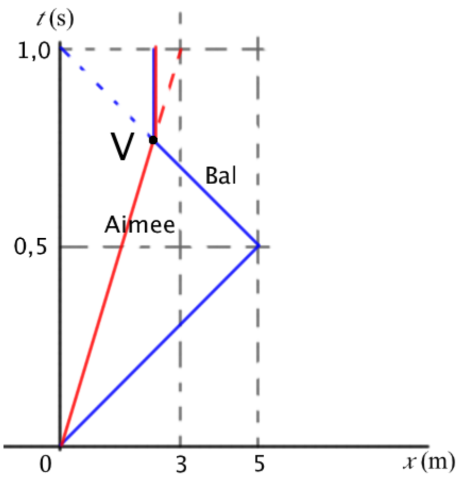
b Zie figuur D.5.
De antilope bevindt zich in de oorsprong van het ruimtetijd-diagram.
De wereldlijn van de antilope valt samen met de *t*-as van het ruimtetijd-diagram.
De wereldlijnen van de het bosje en het luipaard beginnen op dezelfde plaats en links van de oorsprong. Je ziet ook figuur D.4 dat op *t* = 0 de plaats van het bosje en de luipaard links van de plaats van de antilope ligt.
De snelheid van de luipaard ten opzichte van de antilope is kleiner dan de snelheid van de antilope ten opzichte van het bosje. Dus loopt de wereldlijn van de luipaard minder steil dan die van het bosje.
De wereldlijn van de luipaard moet de *ct*-as snijden omdat de luipaard de antilope inhaalt. De wereldlijn van het bosje moet naar links wijzen zodat die de *t*-as niet kan snijden.



Figuur D.5

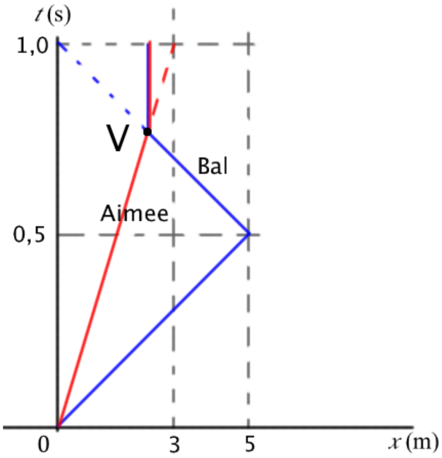
Opgave 8

a Zie figuur D.6a.
Aimee heeft een snelheid van 3,0 m/s. Dus op *t* = 1,0 s bevindt ze zich op *x* = 3,0 m. De wereldlijn van Aimee gaat dus door de oorsprong en het punt (3,0; 1,0).



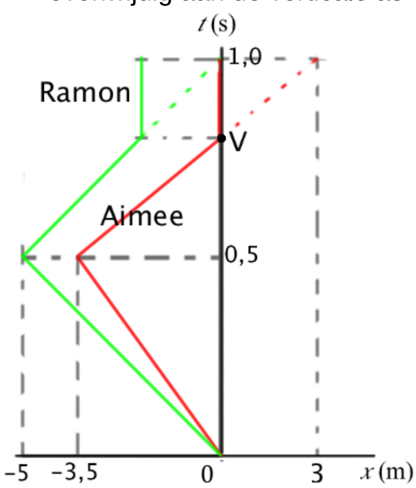
Figuur D.6a

b Zie figuur D.6b.
Gebeurtenis V is het snijpunt van de wereldlijn van de bal en de wereldlijn van Aimee. Zodra de bal de muur bereikt, kaatst deze met dezelfde snelheid terug. Dus na t = 0,5 s loopt de wereldlijn van de bal richting het punt (0,0; 1,0).
Op het moment dat Aimee de bal heeft gevangen, staat zij stil ten opzichte van Ramon. Vanaf gebeurtenis V loopt haar wereldlijn evenwijdig aan de die van Ramon en dus evenwijdig aan de verticale as.



Figuur D.6b

c Zie figuur D.7.
Ramon beweegt eerst met een snelheid van −10 m/s, en na het stuiteren van de bal beweegt Ramon met een snelheid van +10 m/s ten opzichte van de bal.
De bal bereikt na 0,5 s de muur. Dan bevindt Ramon zich in het punt (−5,0; 0,5). Na t = 0,5 s loopt de wereldlijn van Ramon richting het punt (0,0; 1,0).
De bal beweegt met een snelheid van 10 m/s en Aimee beweegt met 3,0 m/s richting de muur. Voor het stuiteren beweegt Aimee dus met een snelheid van −7 m/s ten opzichte van de bal. Op t = 0,5 s legt Aimee dus een afstand af van −7 × 0,5 = −3,5 m af.
Na het stuiteren beweegt Aimee nog steeds richting de muur maar de bal komt met een snelheid van 10 m/s richting haar. Zij beweegt dus met een snelheid van 13 m/s ten opzichte van de bal. Als zij door zou blijven lopen dan legt Aimee tussen t = 0,5 en t = 1,0 s een afstand van 13 × 0,5 = 6,5 m. Na 0,5 s loopt de wereldlijn van Aimee richting het punt (3,0; 1,0)
Gebeurtenis V vindt plaats wanneer de wereldlijn van Aimee de wereldlijn van de bal snijdt. Op dat moment stopt de bal met bewegen, net als Ramon en Aimee. De wereldlijnen van Ramon en Aimee lopen dan evenwijdig aan die van de bal en dus evenwijdig aan de verticale as



Figuur D.7

Opgave 9

a De afstand die het licht aflegt bereken je met de formule voor de snelheid.

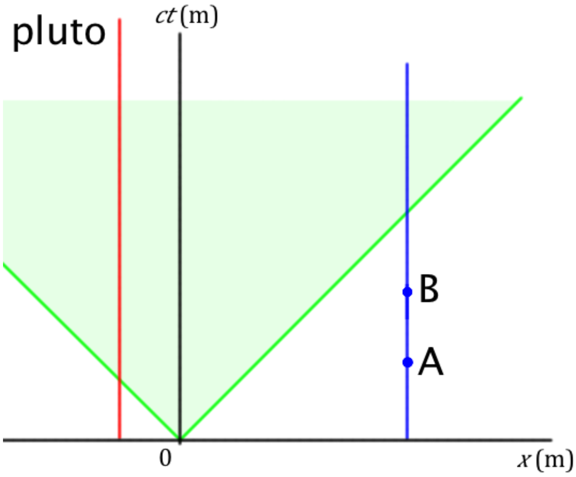
$x = v \cdot t$.
$x = 0{,}1496 \cdot 10^{12}$ m (Zie BINAS tabel 31)
$v = c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
$0{,}1496 \cdot 10^{12} = 2{,}99792458 \cdot 10^{8} \cdot t$
$t = 4{,}9901 \cdot 10^{2}$ s
Dit $\frac{4{,}9901 \cdot 10^2}{60} = 8{,}3168$ min
Afgerond: 8 minuten

b Je ziet de gebeurtenis 'de zon gaat onder in Nederland' als het licht vanuit Nederland je ogen bereikt. Gaat de zon onder in Nederland, dan bevindt Nederland al in de schaduw. Het laatste licht dat in Nederland wordt weerkaatst, moet de afstand tussen de aarde en de maan afleggen, en dat kost tijd. Je neemt de gebeurtenis dus later waar.

Opgave 10

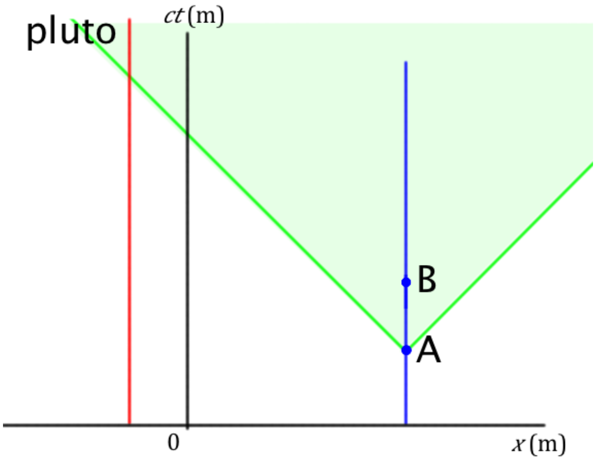
a De afstand 1 lichtjaar is de afstand die het licht in 1 jaar aflegt. De afstand $2{,}0 \cdot 10^{3}$ lichtjaar legt licht dus af in $2{,}0 \cdot 10^{3}$ jaar.
De supernova vond dus plaats in $1604 - 2{,}0 \cdot 10^{3} = -3{,}96 \cdot 10^{2}$ jaar.
Afgerond: $-4{,}0 \cdot 10^{2}$ jaar
De supernova vond dus plaats in het jaar $4{,}0 \cdot 10^{2}$ voor Christus.

b Zie figuur D.8a.
Je kunt een gebeurtenis waarnemen als die binnen de lichtkegel van de waarnemer valt. Gebeurtenis A valt buiten de lichtkegel en kun hij dus niet waarnemen.



Figuur D.8a

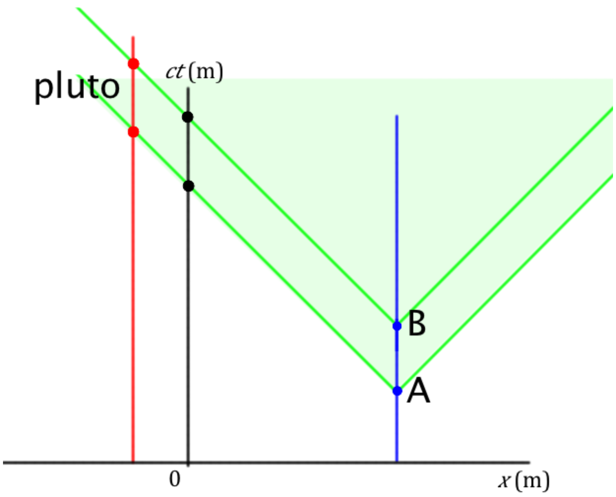
c Zie figuur D.8b.
De gebeurtenis ‘supernova waarnemen’ is de rand van de lichtkegel in punt A.
Deze lichtkegel snijdt de *ct*-as van een waarnemer op aarde op een tijdstip later dan gebeurtenis B. Dus is de zware ster al een neutronenster als de supernova wordt waargenomen.



Figuur D.8b

d Zie figuur D.8b. De lichtkegel van gebeurtenis A snijdt zowel de wereldlijn van Pluto als de wereldlijn van een waarnemer op Aarde. Het snijpunt met de wereldlijn van Pluto wordt op een later tijdstip bereikt.

e Zie figuur D.8c. De lichtkegel van gebeurtenis B snijdt de wereldlijn van Pluto later dan de lichtkegel van gebeurtenis A. De afstand tussen de snijpunten op de wereldlijn van Pluto is even groot als de afstand tussen de snijpunten op de wereldlijn van de aarde.



Figuur D.8c

D.3 Gelijktijdigheid

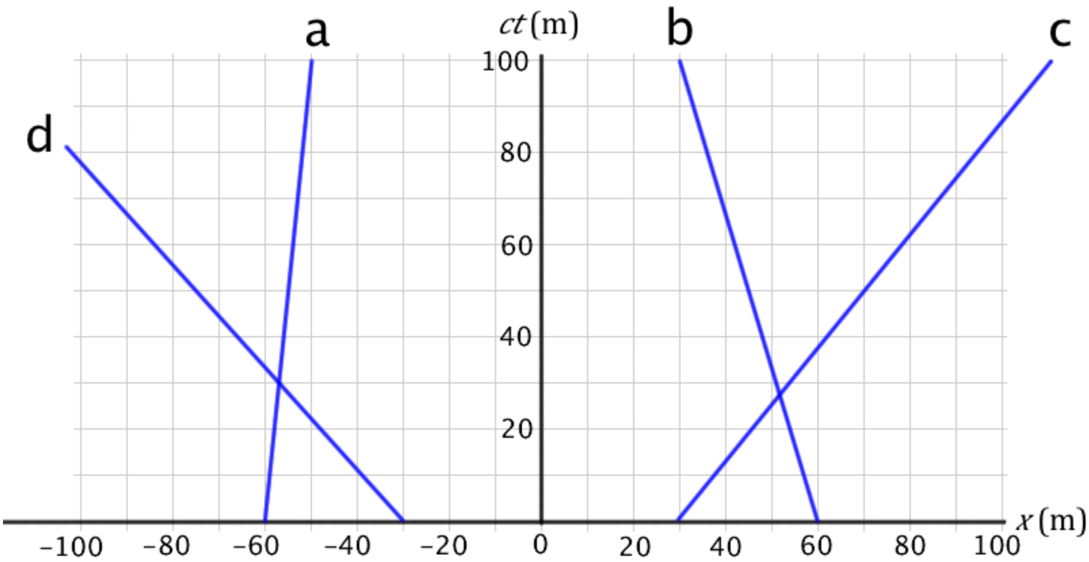
Opgave 11

a Zie lijn a in figuur D.9.
x_0 = −60 m, dus lijn a gaat door punt (−60, 0)
Voor de verplaatsing geldt $s = v \cdot t$ met $v = 0{,}1c$. Hieruit volgt $s = 0{,}1c \cdot t. = 0{,}1ct$.
Dus als ct = 100 m, is $s = 0{,}1 \times 100 = 10$ m
Lijn a gaat dus door (−50, 100)

b Zie lijn b in figuur D.9.
x_0 = 60 m, dus lijn a gaat door punt (60, 0)
$v = -0{,}3c$ dus op ct = 100 m is $s = -0{,}1 \times 100 = -30$ m
Lijn b gaat dus door (30, 100)

c Zie lijn c in figuur D.9.
x_0 = 30 m, dus lijn c gaat door punt (30, 0)
$v = 0{,}8c$ dus op ct = 50 m is $s = 0{,}8 \times 50 = 40$ m
Lijn c gaat dus door (70, 50)

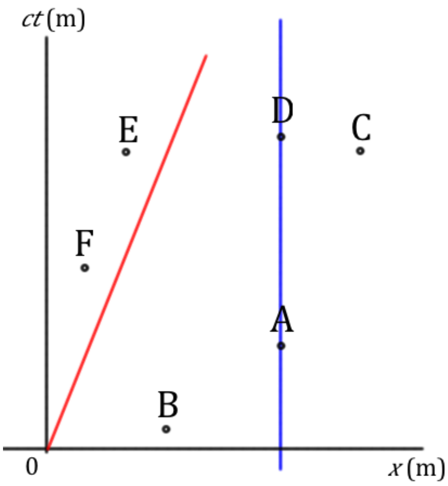
d Zie figuur D.9.
x_0 = −30 m, dus lijn d gaat door punt (−30, 0)
$v = -0{,}9c$ dus op ct = 50 m is $s = -0{,}9 \times 50 = -45$ m
Lijn a gaat dus door (−75, 50)



Figuur D.9

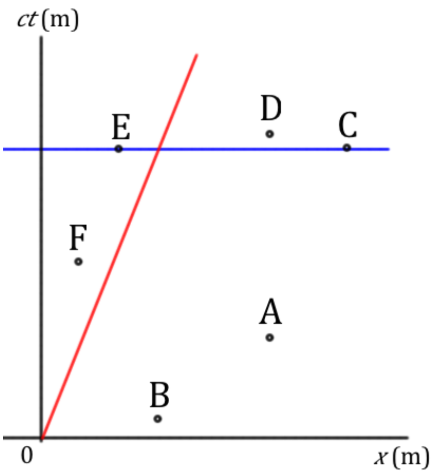
Opgave 12

a Zie figuur D.10a.
Gebeurtenissen die in het stelsel van William op dezelfde plek plaatsvinden, liggen op een lijn evenwijdig aan de *ct*-as van William.
Gebeurtenissen A en D vinden plaats op dezelfde plek in het stelsel van William.



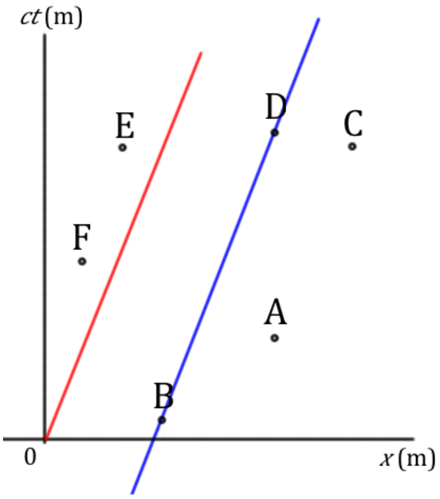
Figuur D.10a

b Zie figuur D.10b.
Gebeurtenissen die in het stelsel van William gelijktijdig plaatsvinden, liggen op een lijn evenwijdig aan de ruimte-as van William.
Gebeurtenissen C en E zijn dus gelijktijdig in het stelsel van William.



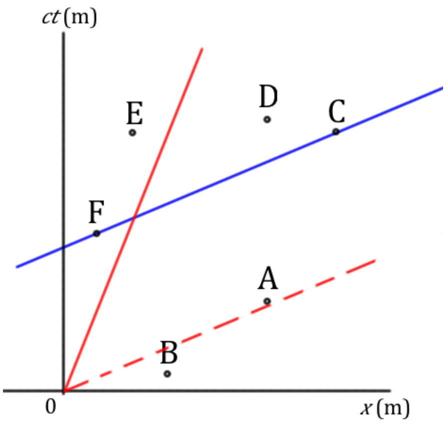
Figuur D.10b

c Zie figuur D.10c.
Gebeurtenissen die in het stelsel van Jurgen op dezelfde plek plaatsvinden, liggen op een lijn evenwijdig aan de *ct*-as van Jurgen. Deze valt samen met de wereldlijn van Jurgen.
Gebeurtenissen B en D vinden plaats op dezelfde plek in het stelsel van Jurgen.
Dat geldt ook voor de gebeurtenissen E en F en de gebeurtenissen A en C.



Figuur D.10c

b Zie figuur D.10d.
Gebeurtenissen die in het stelsel van Jurgen gelijktijdig plaatsvinden, liggen op een lijn evenwijdig aan de ruimte-as van Jurgen. De hoek tussen de ruimte-as van het stelsel van Jurgen en de ruimte-as van William, is even groot als de hoek tussen de *ct*-assen.
In figuur D.10d is de ruimte-as van Jurgen met een streeplijn aangegeven.
Gebeurtenis C en F zijn dus gelijktijdig in het stelsel van William.



Figuur D.10d

Opgave 13

a Voor de verplaatsing van Bart geldt $s = v \cdot t$.

Hieruit volgt $s = \frac{v}{c} \cdot c \cdot t = \frac{v}{c} \cdot ct$

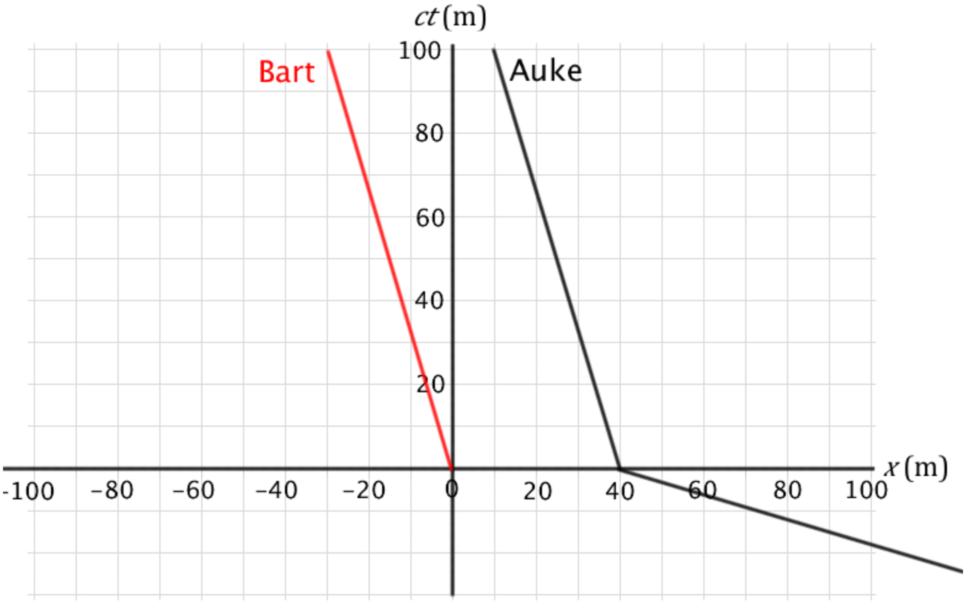
Als ct = 100 dan geldt s = −30 m

Dus $-30 = \frac{v}{c} \cdot 100$

$v = -0{,}30c$

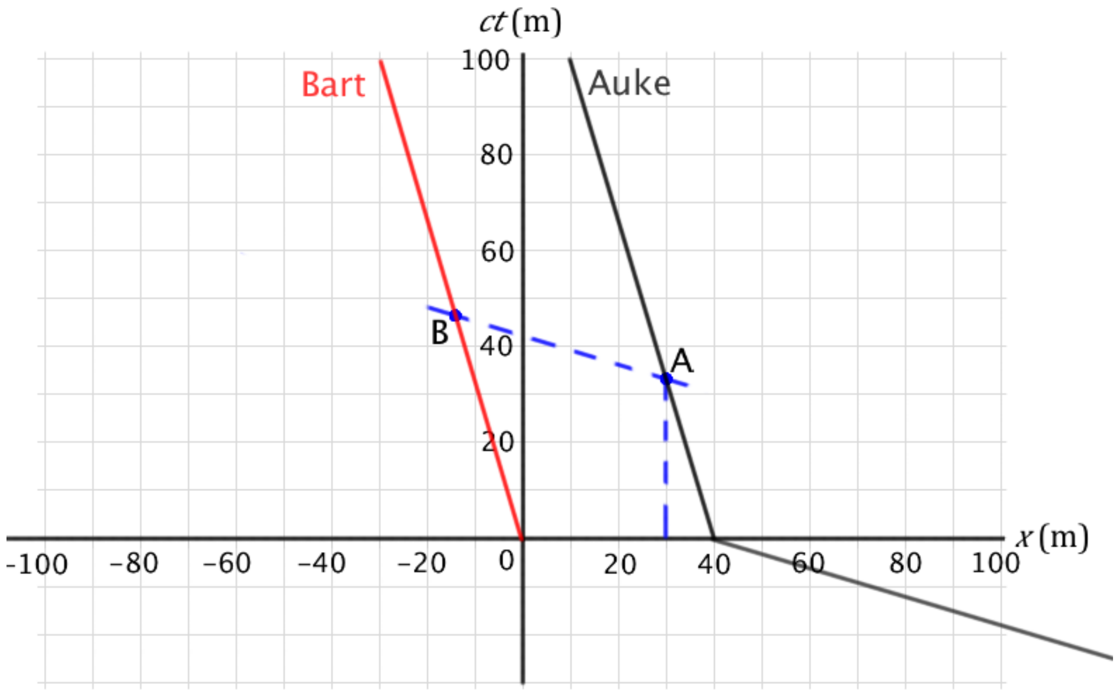
De steilheid van de wereldlijn van Auke is gelijk aan die van Bart. De snelheid van Auke is dus ook −0,30c

b Zie figuur D.11a. De hoek tussen de ruimte-as van Auke en de ruimte-as van Yuen is gelijk aan de hoek tussen de ct-assen van Auke en Yuen.
De ct-as van Auke valt samen met de wereldlijn van Auke in diagram D.11a.



Figuur D.11a

c Zie figuur D.11b.
Gebeurtenis A vindt plaats op x = 30 m.
Gebeurtenis B vindt in het stelsel van Bart en Auke gelijktijdig plaats.
Gebeurtenissen A en B liggen dus op een lijn die evenwijdig is aan de ruimte-as van Auke.



Figuur D.11b

d Gebeurtenissen die in het stelsel van Yuen gelijktijdig zijn, liggen op een lijn die evenwijdig is aan de ruimte-as van Yuen. In het referentiestelsel van Yuen vindt gebeurtenis A vindt eerder plaats dan gebeurtenis B.
Dus kunnen in het referentiestelsel van Yuen de twee inslagen niet tegelijkertijd plaatvinden.

Opgave 14

a De tijd bereken je met de formule voor de snelheid.

$x = v \cdot t$.
x = 80 m
$v = 0{,}27c = 0{,}27 \times 2{,}998 \cdot 10^{8} = 8{,}09 \cdot 10^{7}$ m/s
$80 = 8{,}09 \cdot 10^{7} \cdot t$
$t = 9{,}88 \cdot 10^{-7}$ s
Afgerond: $t = 9{,}9 \cdot 10^{-7}$ s

b De afstand in het referentiestelsel van de kogel bereken je met de formule voor de lengtekrimp.
De relativistische factor bereken je met de formule voor gammafactor.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$v = 0{,}27c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}27c)^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}27^2}} = 1{,}039$$

$$\ell_b = \frac{\ell_e}{\gamma}$$

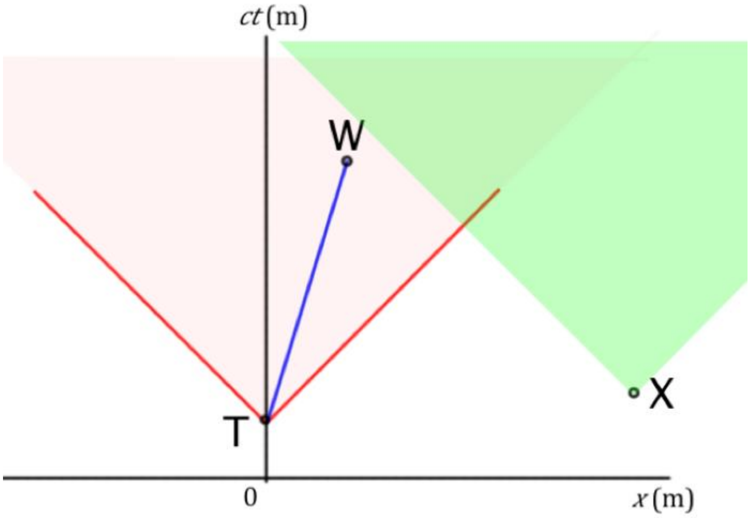
$$\ell_e = 80 \text{ m}$$

$$\ell_b = \frac{80}{1{,}039}$$

$$\ell_b = 77{,}0 \text{ m}$$

Afgerond: $\ell_b = 77 \text{ m}$

c Zie figuur D.12.
Mogelijke gevolgen van gebeurtenis X bevinden zich in de lichtkegel van gebeurtenis X.
Dat is niet het geval, dus de schutter kan geen gelijk hebben.



Figuur D.12

Opgave 15

a Gebeurtenissen die in het referentiestelsel van Lola gelijktijdig plaatsvinden, liggen op een lijn die evenwijdig is aan de ruimte-as van Lola.
Gebeurtenissen A en B zijn in het stelsel van Lola dus gelijktijdig.

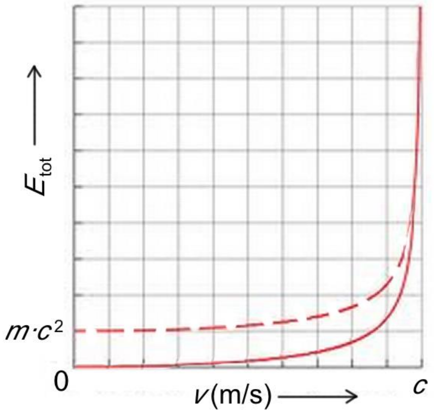
b Gebeurtenissen die in het referentiestelsel van Buzz gelijktijdig plaatsvinden, liggen op een lijn die evenwijdig is aan de ruimte-as *x*’ van Buzz.
Gebeurtenissen A en A’ zijn in het stelsel van Buzz dus gelijktijdig.

c In het referentiestelsel van Lola duurt de reis 5,3 jaar. De tijd komt overeen met de afstand OB.
In het referentiestelsel van Buzz komt de duur van de reis overeen met de afstand OA’.
Afstand OA’ is kleiner dan afstand OB. Dus is de reistijd in het referentiestelsel van Buzz kleiner dan 5,3 jaar.

D.4 Energie

Opgave 16

a Zie figuur D.13. De kinetische energie volgt uit $E_{\text{kin}} = E_{\text{tot}} - m \cdot c^2$



Figuur D.13

b Als de snelheid van een deeltje met massa in de buurt van de lichtsnelheid komt, dan neemt de energie asymptotisch toe tot oneindig. Er is dus oneindig veel energie nodig om de lichtsnelheid te bereiken, en dat is onmogelijk.

Opgave 17

a De snelheid van een proton bereken je met de formule voor de gammafactor.
De gammafactor bereken je met de formule voor de totale energie.

$$E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$$

E_{tot} = 7,0 TeV = 7,0·10^{12} eV (Afstemmen eenheden)

$m \cdot c^2$ = 938,272046 MeV = 938,272046·10^{6} eV (Zie BINAS tabel 7)

7,0·10^{12} eV = γ · 938,272046·10^{6}

γ = 7,46·10^{3}

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$7{,}46 \cdot 10^3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}999$$

Het proton heeft dus bijna de lichtsnelheid.

b Het aantal protonen in een bundel bereken je met de totale energie van een bundel en de kinetische energie van een personenauto.
De kinetische energie van de personenauto bereken je met de formule voor de kinetische energie.

$$E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2$$

m = 1200 kg

$v = 90 \text{ km/h} = \frac{90}{3{,}6} = 25 \text{ m/s}$ (Afstemmen eenheden)

$$E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2} \times 1200 \times 25^2 = 3{,}75 \cdot 10^5 \text{ J}$$

De energie van één proton is 7,0 TeV = $7{,}0\cdot10^{12} \times 1{,}602\cdot10^{-19} = 1{,}12\cdot10^{-6}$ J.

Er bevinden zich dus $\dfrac{3{,}75\cdot10^{5}}{1{,}12\cdot10^{-6}} = 3{,}34\cdot10^{11}$ protonen in een bundel.

Afgerond: $3{,}3\cdot10^{11}$

Opgave 18

a De rustenergie bereken je met de formule van Einstein.

$E = m \cdot c^2$

m = 4,0026 u (Zie BINAS tabel 25A)

$m = 4{,}0026 \times 1{,}6605\cdot10^{-27} = 6{,}685\cdot10^{-27}$ kg (Zie BINAS tabel 7)

$c = 2{,}9979\cdot10^{8}$ m/s

$E = 6{,}685\cdot10^{-27} \times (2{,}9979\cdot10^{8})^2$

$E = 6{,}008\cdot10^{-10}$ J

Afgerond: $E = 6{,}0\cdot10^{-10}$ J

b Je moet met relativistische mechanica rekenen als de kinetische energie in de buurt komt van de rustenergie. De kinetische energie is het verschil tussen de totale energie en rustenergie.

$E_k = E_{tot} - E_{rust}$ = 3,5 nJ – $6{,}0\cdot10^{-10} = 3{,}5\cdot10^{-9} - 6{,}0\cdot10^{-10} = 2{,}9\cdot10^{-9}$ J

De kinetische energie is zelfs groter dan de rustenergie, dus je moet relativistische mechanica gebruiken.

c De snelheid van de protonen bereken je met de formule voor de gammafactor.
De gammafactor bereken je met de formule voor de totale energie.

$E_{tot} = \gamma \cdot m \cdot c^2$

E_{tot} = 3,5 nJ = $3{,}5\cdot10^{-9}$ J (Afstemmen eenheden)

$m\cdot c^2 = 6{,}0\cdot10^{-10}$ J

$3{,}5\cdot10^{-9} = \gamma \cdot 6{,}0\cdot10^{-10}$

$\gamma = 5{,}833$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$5{,}833 = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}985$$

$v = 0{,}99c$

Opgave 19

a Het percentage toename volgt uit de relativistische factor in de formule voor de totale energie van het ruimteschip.
De relativistische factor bereken je met de formule voor gammafactor.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

v = 0,20c

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,20c)^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = 1,0206$$

$$E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$$

$$E_{\text{tot}} = 1,0206 \cdot mc^2$$

De totale energie is dus toegenomen met 2%.

b De snelheid van ruimteschip bereken je met de formule voor de gammafactor.
De gammafactor volgt uit de formule voor de totale energie.

$$E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$$

Als E_{tot} verdubbeld is, dan is de totale energie twee keer de rustenergie.
$E_{\text{tot}} = 2\ m \cdot c^2$
Dus de gammafactor is 2,0

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$2,0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{v}{c} = 0,866$$

v = 0,87c

Opgave 20

a De energie die bij een kernreactie vrijkomt bereken je met het massadefect.

$\Delta m = m_{\text{voor}} - m_{\text{na}}$
m_{voor} = 2 × 2,014102 = 4,028204 u (Zie BINAS tabel 25)
m_{na} = 4,002603 u (Zie BINAS tabel 25)
Δm = 4,028204 – 4,002603 = 0,025601 u
1 u komt overeen met 931,494061 MeV (Zie BINAS tabel 7)
E = 0,025601 × 931,494061 = 23,847 MeV
Afgerond: E = 23,8 MeV

b Het aantal kg zeewater bereken je uit de benodigde energie en de energie die de energie die de deuterium in kg zeewater kan leveren.
De energie die de energie die de deuterium in kg zeewater kan leveren bereken je de energie die vrijkomt bij de kernreactie en het aantal deuteriumatomen in 1,0 kg zeewater.

Het aantal deuteriumatomen in 1,0 kg zeewater volgt uit het aantal deuteriumatomen in 1,0 kg water.
Het aantal deuteriumatomen in 1,0 kg water bereken je met aantal mol water in 1,0 kg water en het getal van Avogadro.
Het aantal mol water in 1,0 kg bereken je met de molaire massa van water.

De molaire massa van water is 18,015 g/mol. (Zie BINAS tabel 98)

Dus in 1,0 kg water zit $\frac{1{,}0 \cdot 10^3}{18{,}015} = 55{,}5 \text{ mol } H_2O$

55,5 mol H_2O bevat 55,5 × $6{,}022 \cdot 10^{23} = 3{,}342 \cdot 10^{25}$ moleculen H_2O
en dus 2 × $3{,}342 \cdot 10^{25} = 6{,}685 \cdot 10^{25}$ atomen waterstof
In BINAS tabel 25A staat dat 0,0115% van de waterstof op aarde deuterium is.
1,00 kg water bevat dus $6{,}685 \cdot 10^{25} \times 0{,}000115 = 7{,}688 \cdot 10^{21}$ atomen deuterium.
Dat komt overeen met $7{,}688 \cdot 10^{21} \times 23{,}8 = 1{,}829 \cdot 10^{23}$ MeV.
Dit is $1{,}829 \cdot 10^{23} \times 10^6 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 2{,}931 \cdot 10^{10}$ J.
Het aantal kg zeewater dat nodig is om 30 PJ = $30 \cdot 10^{15}$ J te leveren is dus gelijk aan

$$\frac{30 \cdot 10^{15}}{2{,}931 \cdot 10^{10}} = 1{,}023 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

Afgerond: $1{,}0 \cdot 10^6$ kg

D.5 Zwarte gaten

Opgave 21

a De ontsnappingssnelheid bereken je met de formule voor de ontsnappingssnelheid.

$$v_{\text{ontsnapping}} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{r}}$$

$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} (Zie BINAS tabel 7)
$M = 0{,}29 \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}$ kg (Zie BINAS tabel 32C)
$r = 0{,}31 \times 6{,}963 \cdot 10^{8}$ m (Zie BINAS tabel 32C)

$$v_{\text{ontsnapping}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \times 0{,}29 \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}}{0{,}31 \times 6{,}963 \cdot 10^{8}}} = 5{,}97 \cdot 10^{5} \text{ m/s}$$

Afgerond: $v_{\text{ontsnapping}} = 6{,}0 \cdot 10^{5}$ m/s

b De schwarzschildstraal bereken je met de formule voor de schwarzschildstraal.

Voor de schwarzschildstraal geldt $R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$

$G = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} (Zie BINAS tabel 7)
$M = 0{,}29 \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}$ kg (Zie BINAS tabel 32C)
$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ m/s (Zie BINAS tabel 7)

$$R_s = \frac{2 \times 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \times 0{,}29 \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}}{\left(2{,}9979 \cdot 10^{8}\right)^2} = 8{,}563 \cdot 10^{2} \text{ m}$$

Afgerond: $R_s = 8{,}6 \cdot 10^{2}$ m

Opgave 22

a Voor de schwarzschildstraal geldt $R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$

De schwarzschildstraal is alleen maar afhankelijk van de massa van de zon en niet van de straal. Dus de schwarzschildstraal blijft gelijk als de straal van de zon toeneemt.

b Een ster is een zwart gat wanneer de straal van de ster kleiner is dan de schwarzschildstraal. De schwarzschildstraal van de neutronenster is 2,95 km, omdat de massa gelijk is aan de massa van de zon. De straal van de neutronenster is 10 km en en dus groter dan 2,95 km. De neutronenster is dus geen zwart gat.

c Wordt de schwarzschildstraal 2 keer zo groot, dan wordt volgens de formule $R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$ de massa ook 2 keer zo groot. Omdat de dichtheid constant is, wordt het volume dus ook 2 keer zo groot. Voor het volume van een bol geldt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Als de straal toeneemt met 26%, dan wordt het volume $1{,}26^3 = 2{,}00$ keer zo groot.

d Als de neutronenster zijn massa verdubbelt, dan is zijn straal slechts 26% groter geworden. De massa neemt dus sneller toe dan de straal. Op een gegeven moment is de schwarzschildstraal dus groter dan de straal van de neutronenster. En dan hij een zwart gat.

Opgave 23

a Voor de straal van een bol geldt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Voor de dichtheid geldt $\rho = \frac{m}{V}$

Voor de massa M van de ster geldt dus $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

De straal r is gelijk aan de schwarzschildstraal R_S.

$$M = \rho \cdot \tfrac{4}{3}\pi \cdot R_S^3 \text{ met } R_S = \frac{2G \cdot M}{c^2}$$

$$M = \rho \cdot \tfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{2G \cdot M}{c^2}\right)^3$$

$$M = \rho \cdot \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{8G^3 \cdot M^3}{c^6}$$

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi \cdot G^3 \cdot M^2}$$

b De minimale dichtheid bereken je met de gegeven formule.
De massa van een zwart gat bereken je met de formule voor de schwarzschildstraal.

Voor $R_s = \dfrac{2G \cdot M}{c^2}$

R_S = 1,0 cm = 1,0·10^{-2} m (Afstemmen eenheden)
G = 6,67384·10^{-11} N m^2 kg^{-2} (Zie BINAS tabel 7)
c = 2,9979·10^8 m/s (Zie BINAS tabel 7)

$$1{,}0 \cdot 10^{-2} = \frac{2 \times 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \cdot M}{\left(2{,}9979 \cdot 10^8\right)^2}$$

M = 6,733·10^{24} kg

$$\rho = \frac{3 \times \left(2{,}9979 \cdot 10^8\right)^6}{32\pi \cdot \left(6{,}67384 \cdot 10^{-11}\right)^3 \cdot \left(6{,}733 \cdot 10^{24}\right)^2} = 1{,}607 \cdot 10^{30} \text{ kg/m}^3$$

Afgerond: ρ = 1,6·10^{30} kg/m^3

Opgave 24

a De satelliet staat op grote afstand van het aardoppervlak. Daar is de sterkte van het zwaartekrachtveld veroorzaakt door de aarde kleiner dan die op het aardoppervlak.
Een klok aan boord van de satelliet loopt voor een waarnemer op aarde sneller.
De satelliet beweegt ten opzichte van een waarnemer op aarde. Daardoor is er sprake van tijdrek: de klok aan boord van de satelliet loopt voor een waarnemer op aarde langzamer.
Omdat de twee effecten tegengesteld zijn, geldt voor het totale verschil:
$\Delta t_{tot} = \Delta t_{zw} - \Delta t_{tijdrek}$
$39 = \Delta t_{zw} - 8$
Het tijdverschil is dus 41 μs.

b Het effect van de zwaartekracht op de tijd is groter dan het effect van de tijdrek. De zwaartekracht zorgt ervoor dat de klok aan boord van de satelliet sneller loopt voor waarnemers op aarde. De klok loopt dus sneller.

Opgave 25

a Uit figuur D.41 het basisboek blijkt dat de verhouding tussen het tijdsinterval gemeten in de sonde en het tijdsinterval gemeten op aarde altijd kleiner is dan 1. Het tijdsinterval die op aarde wordt gemeten is dus groter dan die in de sonde.
Voor de frequentie geldt $f = \dfrac{1}{T}$
De gemeten frequentie op aarde is dus kleiner dan 6,5·10^8 Hz.

b De afstand tot de kern van het zwarte gat bereken je met de schwarzschilstraal en de verhouding van de tijdsintervallen.
De tijdsintervallen bereken je met de formule voor de frequentie.
De schwarzschildstraal bereken je met de formule voor de schwarzschildstraal.

De schwarzschildstraal bereken je met $R_s = \dfrac{2G \cdot M}{c^2}$

$$R_s = \frac{2 \times 6{,}67384 \cdot 10^{-11} \times 6{,}0 \cdot 10^{35}}{\left(2{,}9979 \cdot 10^8\right)^2} = 8{,}91 \cdot 10^8 \text{ m}$$

De frequentie is omgekeerd evenredig met de tijd. Er geldt dus:

$$\frac{\Delta t_{zw}}{\Delta t} = \frac{f}{f_{zw}} = \frac{4,2 \cdot 10^8}{6,5 \cdot 10^8} = 0,6461$$

In figuur D.41 van het katern lees je dan af: r = 1,7R_S.
De sonde bevindt zich dus 1,7 × 8,91·10^8 = 1,51·10^9 m.
Afgerond: 1,5·10^9 m

c Uit figuur D.41 uit het katern dat wanneer de afstand r in de buurt van de schwarzschildstraal R_s komt, de verhouding tussen de tijd aan boord van de sonde en de tijd voor een waarnemer op aarde zeer klein wordt.
Een signaal dat aan boord slechts kort duurt, zal op aarde veel langer duren. Als deze verhouding naar nul gaat, dan duurt het op aarde oneidig lang om een signaal waar te nemen. Het signaal wordt dus niet waargenomen.

D.6 Afsluiting

Opgave 26

a De snelheid van het pion bereken je met de formule voor de gammafactor.
De gammafactor volgt uit de formule voor de totale energie.
De rustmassa van een pion bereken je met de rustmassa van een elektron.

$E_{\text{rust,pion}} = 264 \cdot E_{\text{rust,elektron}}$
$E_{\text{rust,elektron}} = 0{,}510998$ MeV (Zie BINAS tabel 7)
$E_{\text{rust,pion}} = 264 \times 0{,}510998$ MeV $= 134{,}9$ MeV

$$E_{\text{tot}} = \gamma \cdot m \cdot c^2$$

$E_{\text{tot}} = 210$ MeV
$m \cdot c^2 = 134{,}9$ MeV
$210 = \gamma \cdot 134{,}9$
$\gamma = 1{,}556$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$1{,}556 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}766$$

Het pion heeft dus een snelheid die 77% van de lichtsnelheid is.

b De afstand die het pion aflegt bereken je met de formule voor de snelheid.
De snelheid bereken je met de lichtsnelheid.
De tijd bereken je met de formule voor de tijdrek.
De relativistische factor bereken je met de formule voor gammafactor.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$v = 0{,}77c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}77c)^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = 1{,}567$$

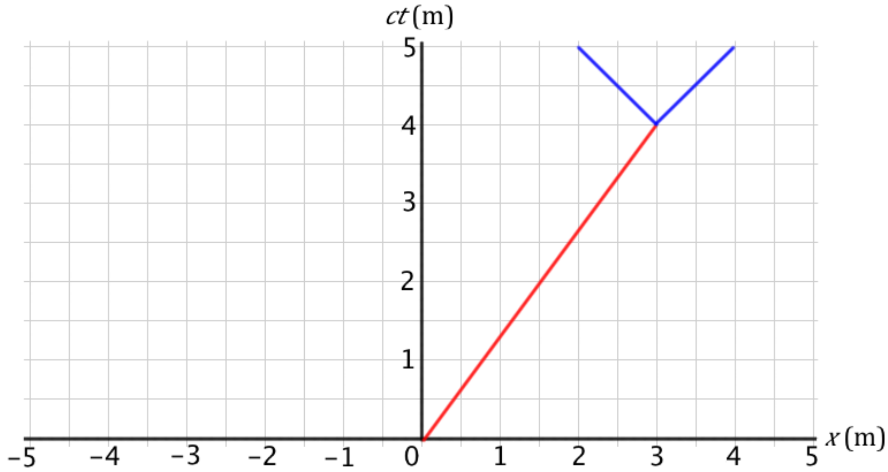
$$\Delta t_b = \gamma \cdot \Delta t_e$$

$$\Delta t_e = 8{,}4 \cdot 10^{-17}\ \text{s}$$

$$\Delta t_b = 1{,}567 \times 8{,}4 \cdot 10^{-17} = 1{,}316 \cdot 10^{-16}$$

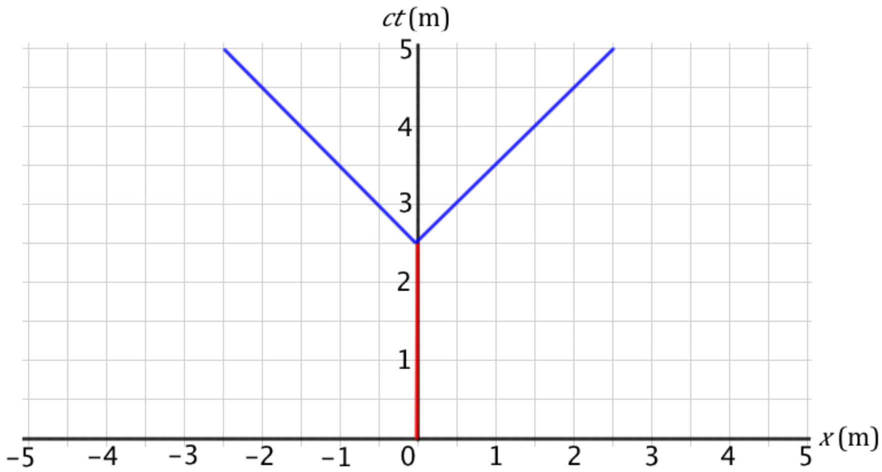
$s = v \cdot t$
$v = 0{,}77c = 0{,}77 \times 2{,}9979 \cdot 10^8 = 2{,}308 \cdot 10^8$ m/s
$s = 2{,}308 \cdot 10^8 \times 1{,}316 \cdot 10^{-16} = 3{,}037 \cdot 10^{-8}$ m
Afgerond: $s = 3{,}0 \cdot 10^{-8}$ m

c Zie figuur D.14.
De wereldlijn van het pion loopt tot aan $x = 3{,}0 \cdot 10^{-8}$ m en $ct = 2{,}9979 \cdot 10^{8} \times 1{,}316 \cdot 10^{-16} = 3{,}95 \cdot 10^{-8}$ m.
De wereldlijn van een foton staat onder een hoek van 45° omdat het met de lichtsnelheid beweegt. In figuur D.14 bewegen ze in tegengestelde richting.



Figuur D.14

d Zie figuur D.15.
Het pion staat stil in zijn eigen stelsel. Op $ct = 2{,}9979 \cdot 10^{8} \times 8{,}4 \cdot 10^{-17} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ m vervalt het pion in twee fotonen.



Figuur D.15

Opgave 27

a Een lichtjaar is de afstand die licht aflegt in een jaar. Een lichtjaar is dus gelijk aan $365{,}25 \times 24 \times 3600 \times 2{,}9979 \cdot 10^8 = 9{,}461 \cdot 10^{15}$ m.
Volgens BINAS tabel 32B is de afstand tot Altair gelijk aan $15{,}8 \cdot 10^{16}$ m.
Dat is gelijk aan $\frac{15{,}8 \cdot 10^{16}}{9{,}461 \cdot 10^{15}} = 16{,}7$ lichtjaar.

b De tijd die Evelien onderweg is in het stelsel van Gert bereken je met de formule voor de snelheid.
Druk je de afstand uit in lichtjaar en de snelheid in delen van lichtsnelheid dan is de tijd in jaar.
$x = v \cdot t$
$x = 2 \times 16{,}7$ lichtjaar = 33,4 lichtjaar (Raket gaat heen en weer)
$v = 0{,}80$
$33{,}4 = 0{,}80 \cdot t$
$t = 41{,}75$ jaar
Gert is dus 19 + 41,75 = 60,75 jaar wanneer Evelien terugkomt.
Afgerond: 61 jaar

c In het referentiestelsel van Evelien verloopt de tijd langzamer dan in het referentiestelsel van Gert vanwege tijdrek.
De tijdrek bereken je met de formule voor de tijdrek.
De tijd van Evelien bereken je met de formule voor de tijdrek.
De relativistische factor bereken je met de formule voor gammafactor.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$v = 0{,}80c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}80c)^2}{c^2}}}$$

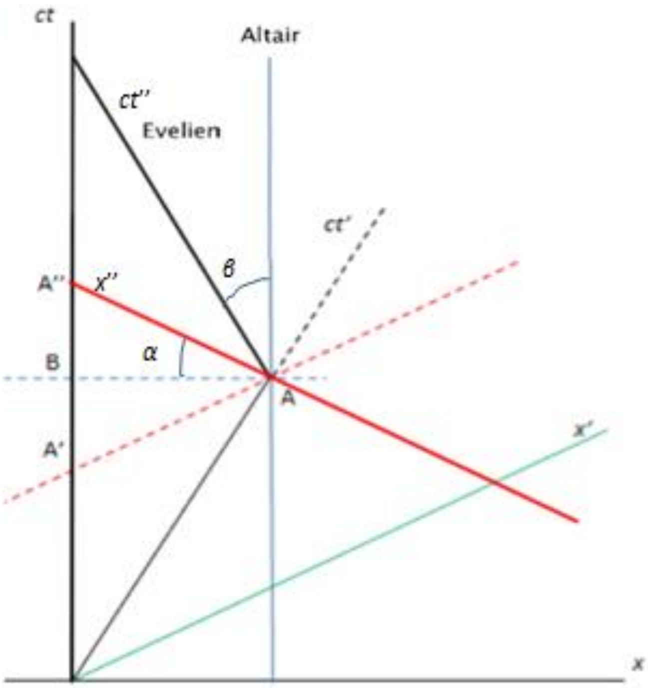
$$\gamma = 1{,}666$$

$$42 = 1{,}666 \cdot \Delta t_e$$

$$\Delta t_e = 25{,}2 \text{ jaar}$$

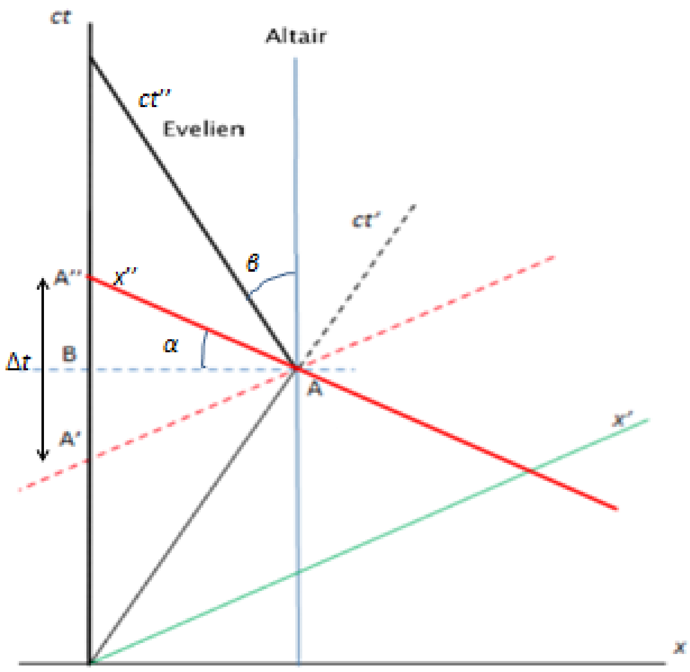
Evelien is dus 27 + 25,2 = 52,2 jaar wanneer ze terugkomt.
Ze is dus jonger dan Gert.

d Zie figuur D.16a.
De *ct*''-as van Evelien valt samen met de lijn met bijschrift Evelien.
De hoek tussen *x*''-as van Evelien en de *x*-as van Gert is even groot als de hoek tussen de *ct*''-as van Evelien en de *ct*-as van Gert.
De hoek tussen *x*''-as van Evelien en de *x*-as van Gert komt overeen met hoek *α*.
De hoek tussen de *ct*''-as van Evelien en de *ct*-as van Gert komt overeen met hoek *β*.
x''-as van Evelien loopt dus door de punt A' en A''
De gebeurtenissen A' en A'' liggen op de *x*''-as van Evelien. De gebeurtenissen A en A'' zijn dus gelijktijdig in het stelsel van Evelien.



Figuur D.16a

e Zie figuur D.16b.
Het verschil in reistijd Δ*t* volgt uit de afstand van A' tot A''.



Figuur D.16b